Spinortheorie der Elementarteilchen II
Mathematische Durchführung des Postulates der Beschreibung mit 2 (2s + 1) bzw. 4 (2s + 1) reellen Wellenfunktionen

Von Hermann Donnert

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Köln

(Z. Naturforschg. **8a**, 745—747 [1953]; eingegangen am 4. September 1953)

Es wird gezeigt, daß die Diracschen Wellengleichungen für Elementarteilchen nicht verschwindender Ruhmasse und vom Maximalspin[2] s mit der Schrödinger-Gordon-Gleichung für die Komponenten zweier vollsymmetrischer Spinoren vom Rang s mit je $2s+1$ wesentlich verschiedenen komplexen Komponenten im Falle der kräftefreien Bewegung des Teilchens äquivalent ist. Im Falle ganzzahligen Maximalspins sind diese wiederum äquivalent mit der Schrödinger-Gordon-Gleichung für $2s+1$ wesentlich verschiedene komplexe Komponenten eines Tensors. Es ist damit gezeigt, daß im Falle der kräftefreien Bewegung des Elementarteilchens die Forderungen der Capschen Hypothese erfüllbar sind.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie die in der Hypothese von Cap[1] geforderte Reduktion der Anzahl der Wellenfunktionskomponenten auf $2\,(2\,s+1)$ bzw. $4\,(2\,s+1)$ reelle Komponenten im Fall kräftefreier Elementarteilchen vom Maximalspin s und nicht verschwindender Ruhmasse m durchgeführt werden kann. Den Ausgangspunkt der Betrachtung bilden die Diracschen Feldgleichungen für Elementarteilchen vom Maximalspin s[2, 3, 4], die, wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, mit zwei Gleichungssystemen für je $2\,(2\,s+1)$ reelle spinorielle Wellenfunktionen mathematisch äquivalent sind.

1. Definitionen, Diracsche Feldgleichungen, Schrödinger-Gordon-Gleichung[5]

Um unsere Aufgabe durchzuführen, benützen wir folgende vollsymmetrische Spinoren:

$$a^{(Q)\,\dot{\mu}_1\,\dot{\mu}_2\,\ldots\,\dot{\mu}_{s+Q}}_{\qquad\quad \nu_1\,\nu_2\,\ldots\,\nu_{s-Q}},$$

wo s ganzzahlig, d.h. $2s \equiv 0\,(2)$ oder halbzahlig, d.h. $2\,s \equiv 1\,(2)$ sein kann, dementsprechend durchläuft der Index Q die Werte $(-s, -s+1, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, s-1, s)$ für $2\,s \equiv 0\,(2)$, hingegen $(-s, -s+1, \ldots, -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, \ldots, s-1, s)$ für $2\,s \equiv 1\,(2)$. Diese Spinoren gehören zur irreduziblen Darstellung der eigentlichen Lorentz-Gruppe[6, 7]:

$$\mathfrak{D}_{s+Q/2,\; s-Q/2}$$

und beschreiben in den Wellengleichungen ein Elementarteilchen vom Maximalspin s. In dieser Bezeichnungsweise haben die Diracschen Feldgleichungen folgende Form[8]:

$$\partial^{\dot{\mu}_{s+1/2}\;\nu_{s+1/2}}\; a^{(-1/2)\,\dot{\mu}_1\,\dot{\mu}_2\,\ldots\,\dot{\mu}_{s-1/2}}_{\qquad\quad\;\; \nu_1\,\nu_2\,\ldots\,\nu_{s+1/2}} = i\,\varkappa\, a^{(+1/2)\,\dot{\mu}_1\,\dot{\mu}_2\,\ldots\,\dot{\mu}_{s+1/2}}_{\qquad\quad\;\; \nu_1\,\nu_2\,\ldots\,\nu_{s-1/2}}, \tag{1a}$$

$$\partial_{\dot{\mu}_{s+1/2}\;\nu_{s+1/2}}\; a^{(+1/2)\,\dot{\mu}_1\,\dot{\mu}_2\,\ldots\,\dot{\mu}_{s+1/2}}_{\qquad\quad\;\; \nu_1\,\nu_2\,\ldots\,\nu_{s-1/2}} = i\,\varkappa\, a^{(-1/2)\,\dot{\mu}_1\,\dot{\mu}_2\,\ldots\,\dot{\mu}_{s-1/2}}_{\qquad\quad\;\; \nu_1\,\nu_2\,\ldots\,\nu_{s+1/2}} \tag{1b}$$

für $2\,s \equiv 1\,(2)$, hingegen

$$\partial^{\dot{\mu}_{s+1}\,\nu_s}\; a^{(0)\,\dot{\mu}_1\,\dot{\mu}_2\,\ldots\,\dot{\mu}_s}_{\qquad \nu_1\,\nu_2\,\ldots\,\nu_s} = i\,\varkappa\, a^{(+1)\,\dot{\mu}_1\,\dot{\mu}_2\,\ldots\,\dot{\mu}_{s+1}}_{\qquad\;\; \nu_1\,\nu_2\,\ldots\,\nu_{s-1}}, \tag{2a}$$

[1] F. Cap, Spinortheorie der Elementarteilchen I, Z. Naturforschg. **8a**, 740 [1953].

[2] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **155**, 447 [1936].

[3] M. Fierz, Helv. physica Acta **12**, 3 [1939]. M. Fierz u. W. Pauli, Helv. physica Acta **12**, 297 [1939]. W. Pauli u. M. Fierz, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **173**, 211 [1939].

[4] H. Donnert, Acta physica austriaca **7**, 181 [1953].

[5] Für die Formeln der Spinor- und Tensorrechnung, die hier verwendet werden, siehe Anm. 4, § 1.

[6] P. Urban u. F. Schwarzl, Acta physica austriaca **4**, 380 [1951].

[7] B. L. van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Berlin 1932, S. 85.

[8] Wegen des Faktors i auf der rechten Seite von (1a, b) siehe Anm. 4, § 2.

$$\partial_{\dot\mu_{s+1}\nu_s} a^{(+1)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+1}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-1}} = i\varkappa\, a^{(0)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_s}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_s} \qquad (2\,\mathrm{b})$$

für $2s \equiv 0\ (2)$. Die Gln. (1a, b) und (2a, b) sind invariant gegen Transformationen der eigentlichen Lorentz-Gruppe $\mathfrak{L}^+$. Bei Lorentz-Spiegelung Σ geht $a^{(+1/2)} \to i^{-2s} a^{(-1/2)}$, $a^{(-1/2)} \to i^{-2s} a^{(+1/2)}$ und somit (1a, b) in sich selbst über, hingegen gilt $a^{(0)} \to i^{-2s} a^{(0)}$, $a^{(+1)} \to i^{-2s} a^{(-1)}$ und $a^{(-1)} \to i^{-2s} a^{(+1)}$, so daß (2a, b) übergeht in

$$\partial_{\dot\mu_s\nu_{s+1}} a^{(0)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_s}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_s} = i\varkappa\, a^{(-1)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s-1}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s+1}}, \qquad (3\,\mathrm{a})$$

$$\partial^{\dot\mu_s\nu_{s+1}} a^{(-1)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s-1}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s+1}} = i\varkappa\, a^{(0)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_s}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_s} \qquad (3\,\mathrm{b})$$

und umgekehrt.

Als notwendige Folge von (1a, b) findet man durch Elimination:

$$\left(-\partial_{\dot\mu_{s+1/2}\nu_{s+1/2}}\partial^{\dot\mu_{s+1/2}\lambda} - \delta^{\lambda}_{\nu_{s+1/2}}\varkappa^2\right) \cdot a^{(-1/2)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s-1/2}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-1/2}\lambda} \equiv (\Box-\varkappa^2)\, a^{(-1/2)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s-1/2}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s+1/2}} = 0, \qquad (4\,\mathrm{a})$$

$$\left(-\partial^{\dot\mu_{s+1/2}\nu_{s+1/2}}\partial_{\dot\varkappa\nu_{s+1/2}} - \delta^{\dot\mu_{s+1/2}}_{\dot\varkappa}\varkappa^2\right) \cdot a^{(+1/2)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s-1/2}\dot\varkappa}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-1/2}} \equiv (\Box-\varkappa^2)\, a^{(+1/2)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+1/2}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-1/2}} = 0, \qquad (4\,\mathrm{b})$$

ebenso aus (2a, b):

$$\left(-\partial_{\dot\mu_{s+1}\nu_s}\partial^{\dot\mu_{s+1}\lambda} - \delta^{\lambda}_{\nu_s}\varkappa^2\right) a^{(0)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_s}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-1}\lambda} \equiv (\Box-\varkappa^2)\, a^{(0)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_s}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_s} = 0. \qquad (5)$$

Umgekehrt erhält man aus (4a) mit (1a) als Definitionsgleichung für $a^{(+1/2)}$) wieder (1b), aus (4b) mit (1b) zur Definition von $a^{(-1/2)}$ (1a), aus (5) mit (2a) zur Definition von $a^{(+1)}$ (2b).

2. Ableitung der neuen Wellengleichungen

Wir führen als Definitionsgleichungen ein:

$$\partial^{\dot\mu_{s+Q+1}\nu_{s-Q}} a^{(Q)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q}} = i\varkappa\, a^{(Q+1)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q+1}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q-1}}, \qquad (6)$$

$$\partial_{\dot\mu_{s-Q}\nu_{s+Q+1}} a^{(-Q)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s-Q}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s+Q}} = i\varkappa\, a^{(-Q-1)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s-Q-1}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s+Q+1}}, \qquad (7)$$

für $Q = (1/2, 3/2, \ldots, s-1)$ wenn $2s \equiv 1\ (2)$, $Q = (1, 2, \ldots, s-1)$ wenn $2s \equiv 0\ (2)$, die gegen eigentliche Lorentz-Transformationen invariant sind, bei Lorentz-Spiegelung geht (6) in (7) über und umgekehrt.

Wendet man auf (6) und (7) den Operator $(\Box - \varkappa^2)$ an, so folgt wegen (4a, b) und (5) mit (2a) und (3a):

$$(\Box-\varkappa^2)\, a^{(Q)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q}} = 0 \qquad (8)$$

für $Q = (-s, -s+1, \ldots, -1/2, +1/2, \ldots, s+1, s)$ für $2s \equiv 1\ (2)$,
$Q = (-s, -s+1, \ldots, -1{,}0, +1, \ldots, s-1, s)$ für $2s \equiv 0\ (2)$.

Mit (8) findet man als Umkehrformeln der Definitionsgln. (6) und (7):

$$\partial_{\dot\mu_{s+Q+1}\nu_{s-Q}} a^{(Q+1)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q+1}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q-1}} = i\varkappa\, a^{(Q)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q}}, \qquad (9)$$

$$\partial^{\dot\mu_{s-Q}\nu_{s+Q+1}} a^{(-Q-1)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s-Q-1}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s+Q+1}} = i\varkappa\, a^{(-Q)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s-Q}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s+Q}} \qquad (10)$$

für die bei Gl. (6) und Gl. (7) angeführten Werte von Q, außerdem als Umkehrungen von (2a) und (3a) mit (8) die Gln. (2b) und (3b) und umgekehrt. Aus (9) und (10) folgt umgekehrt wegen (8) notwendig wieder (6) und (7).

Nimmt man zu (6), (7), (9) und (10) noch die Dirac-Gleichungen (1a, b), (2a, b) und (3a, b) hinzu, so kann man alle diese Gleichungen zusammenfassen in:

$$\partial^{\dot\mu_{s+Q+1}\nu_{s-Q}} a^{(Q)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q}} = i\varkappa\, a^{(Q+1)\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q+1}}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q-1}}, \qquad (11\,\mathrm{a})$$

$$\partial_{\dot\mu_{s+Q+1}\,\nu_{s-Q}}\; a^{(Q+1)\,\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q+1}}_{\qquad\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q-1}} = \\ = i\varkappa\, a^{(Q)\,\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q}}_{\qquad\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q}} \tag{11b}$$

für alle Werte, die Q annehmen kann.

Es ist noch der Beweis der Vollsymmetrie aller auftretenden Spinoren zu erbringen. Es gilt: Wenn $a^{(Q-1)}$ und $a^{(Q)}$ vollsymmetrisch sind, dann ist wegen (11a) auch $a^{(Q+1)}$ vollsymmetrisch. Für alle Indexpaare außer (μ_{s+Q}, μ_{s+Q+1}) ist die Richtigkeit der Behauptung aus (11a) sofort abzulesen, für den restlichen Fall findet man unter Verwendung von (8)[9]:

$$\varepsilon_{\dot\mu_{s+Q}\,\dot\mu_{s+Q+1}}\; a^{(Q+1)\,\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q+1}}_{\qquad\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q-1}} = \\ = \frac{1}{i\varkappa}\,\partial^{\nu_{s-Q}}_{\dot\mu_{s+Q}}\; a^{(Q)\,\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q}}_{\qquad\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q}} = \\ = -\varkappa^{-2}\,\partial^{\nu_{s-Q}}_{\dot\mu_{s+Q}}\,\partial^{\dot\mu_{s+Q}\,\nu_{s-Q+1}} \\ \cdot\, a^{(Q-1)\,\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q-1}}_{\qquad\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q+1}} = \\ = \varepsilon^{\nu_{s-Q}\,\nu_{s-Q+1}}\; a^{(Q-1)\,\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{s+Q-1}}_{\qquad\nu_1\nu_2\ldots\nu_{s-Q+1}} = 0$$

nach Voraussetzung, womit die Behauptung bewiesen ist. Ebenso kann man zeigen, daß aus (11b) unter Verwendung von (8) die Vollsymmetrie von a^{Q-1} folgt, wenn $a^{(Q)}$ und $a^{(Q+1)}$ vollsymmetrisch sind. Damit ist aber wegen der nach Voraussetzung erfüllten Vollsymmetrie von $a^{(Q)}$ für $Q = (-1, 0, +1)$ und $Q = (-1/2, +1/2)$ diese für alle Werte von Q sichergestellt.

Als Endglieder des Eliminationsvorganges findet man nach (8) für die vollsymmetrischen Spinoren $a^{(+s)}$ und $a^{(-s)}$:

$$(\Box - \varkappa^2)\, a^{(+s)\,\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_{2s}} = 0\,, \tag{12}$$

$$(\Box - \varkappa^2)\, a^{(-s)}_{\quad\nu_1\nu_2\ldots\nu_{2s}} = 0\,. \tag{13}$$

Diese sind gegen Transformationen aus $\mathfrak{L}^+$ invariant, bei Σ geht (12) in (13) über und umgekehrt.

Die Gln. (12) und (13) sind mit (1a, b) bzw. (2a, b) und (3a, b) äquivalent. Benützt man nämlich (9) und (10) als Definitionsgleichungen, um die Elimination rückgängig zu machen, so folgen durch Anwendung des Operators $(\Box - \varkappa^2)$ auf (9) und (10) die Gln. (4a, b) und (5), aus denen man, wie in § 1 angeführt, wiederum (1a, b), (2a, b) und (3a, b) gewinnen kann, wenn man entweder (1a) oder (1b) bzw. (2a) und (3a) als Definitionsgleichungen benützt. Ebenso ist, da aus der Vollsymmetrie von $a^{(+s)}$ und $a^{(-s)}$ mit (9) und (10) auch die Vollsymmetrie von $a^{(+s-1)}$ und $a^{(-s+1)}$ folgt, so daß man die angeführten Sätze über die Vollsymmetrie heranziehen kann, die Vollsymmetrie der Spinoren in (1a, b), (2a, b) und (3a, b) notwendig erfüllt.

Man kann daher die Gln. (12) und (13) zur Beschreibung des Wellenfeldes eines Elementarteilchens vom Maximalspin s heranziehen. Zählt man die Komponenten der vollsymmetrischen Spinoren $a^{(+s)}$ und $a^{(-s)}$, die wesentlich voneinander verschieden sind, ab, so findet man für $a^{(+s)}$ $(2s+1)$ komplexe Komponenten, für $a^{(-s)}$ $(2s+1)$ komplexe Komponenten, also je $2(2s+1)$ reelle Wellenfunktionen. Weil man zur Sicherstellung der Spiegelungsinvarianz der Beschreibung des Wellenfeldes die Gln. (12) und (13) zusammen verwenden muß, erhält man insgesamt $2(2s+1)$ komplexe, das sind $4(2s+1)$ reelle Wellenfunktionen, also gerade doppelt so viele als die Anzahl der inneren Einstellungsmöglichkeiten beträgt. Das ist nicht weiter verwunderlich, da bei der Benützung von Spinoren als Scheinfreiheitsgrad noch die Wahl eines räumlichen Rechts- oder Linkssystems auftritt, der die Zahl der inneren Einstellmöglichkeiten scheinbar verdoppelt, physikalische Realität haben aber nur die $2(2s+1)$ durch Ladung und Spineinstellung bedingten inneren Einstellungen. Geht man für Elementarteilchen mit ganzzahligem Maximalspin s, wo $2s \equiv 0\ (2)$ ist, zur Beschreibung mit Tensorkomponenten über, dann folgt aus (12) und (13) übereinstimmend:

$$(\Box - \varkappa^2)\, G^{m_1 n_1 m_2 n_2 \ldots m_s n_s} = 0\,. \tag{14}$$

Diese Gleichung ist gegen die volle Lorentz-Gruppe invariant. Der Tensor G ist in jedem Indexpaar (m_X, n_X) antisymmetrisch und selbstdual für $X = (1, 2, \ldots, s)$, symmetrisch gegen Vertauschung zweier Indexpaare (m_X, n_X) und (m_Y, n_Y), wo $X \neq Y$ und $X, Y = (1, 2, \ldots, s)$, und spurfrei in jedem Indexpaar (m_X, m_Y), (m_X, n_Y) und (n_X, n_Y). Zählt man seine wesentlich voneinander verschiedenen Komponenten ab, so findet man $(2s+1)$ komplexe, das sind $2(2s+1)$ reelle Komponenten, was genau mit der Zahl der inneren Einstellungen übereinstimmt und der Capschen Forderung entspricht.

Herrn Doz. Dr. F. Cap, Innsbruck, danke ich bestens für wertvolle Diskussionen.

[9] l. c.[4], § 1, G.